Ví dụ 1: Giải bất phương trình

$$\sqrt{x-1}+x-3\leq\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$$

Giải : Với $x\geq 1$ xét các vectơ $\vec{u}=(\sqrt{x-1},x-3)$ và $\vec{e}=(1,1)$ ta có $|\vec{u}|=\sqrt{x-1+(x-3)^2}$ và $|\vec{e}|=\sqrt{2}$.
Theo (II') ta được :

$$(\sqrt{x-1},x-3)(1,1)\leq\sqrt{x-1+(x-3)^2}.\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+x-3\leq\sqrt{2x-2+2(x-3)^2}$$

theo (IV) ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}=\lambda\\ \ \ x-3=\lambda\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=x-3\Rightarrow x=5$$

Ví dụ 2 : Giải bất phương trình

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x}\leq 12\qquad(2)$$

Giải : Tập xác định của vế trái là $\frac{3}{2}\leq x\leq\frac{50}{3}$.

Xét các vectơ $\vec{u}=(\sqrt{x+1},\sqrt{2x-3},\sqrt{50-3x})$ và $\vec{v}=(1,1,1)$, ta có $|\vec{u}|=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ và $|\vec{v}|=\sqrt{3}$.

Theo (II') bất phương trình (2) trở thành :

$$(\sqrt{x+1},\sqrt{2x-3},\sqrt{50-3x})(1,1,1)\leq 4\sqrt{3}.\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x}\leq 12$$

Vậy nghiệm của bpt (2) là $\frac{3}{2}\leq x\leq\frac{50}{3}$.

Ví dụ 3 : Giải phương trình

$$\sin x+\sqrt{2-\sin x^2}+\sin x\sqrt{2-\sin x^2}=3\qquad(3)$$

Giải : Xét các vectơ $\overrightarrow{u}=(\sin x,1,\sqrt{2-\sin x^2})$ và $\overrightarrow{v}=(1,\sqrt{2-\sin x^2},\sin x)$.
Ta có $|\overrightarrow{u}|=|\overrightarrow{v}|=\sqrt{3}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}| = 3$

Theo (III') ta có $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|$ và từ (IV) ta có hệ :

$$\begin{cases} \sin x = \lambda \\ 1 = \lambda\sqrt{2-\sin x^2} \\ \sqrt{2-\sin x^2} = \lambda \sin x \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ và $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathrm{Z})$

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng hệ sau đây vô nghiệm.

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = \sqrt{7}. \end{cases}$$

Giải : Xét các vectơ $\vec{u} = (x^2, y^2, z^2)$ và $\vec{v} = (1, 1, 2)$,

Ta có :

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^4 + y^4 + z^4} = 1,$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$

Theo hệ trên, ta có $\vec{u}.\vec{v} = x^2 + y^2 + 2z^2 = \sqrt{7}$ và $|\vec{u}|.|\vec{v}| = \sqrt{6}$

Do đó

$$\vec{u}.\vec{v} = (x^2, y^2, z^2)(1, 1, 2) = x^2 + y^2 + 2z^2 > \sqrt{6} = |\vec{u}|.|\vec{v}|$$

Điều này mâu thuẫn với (II).

Vậy hệ trên vô nghiệm.

Qua các ví dụ trên rõ ràng ta thấy sự phong phú, tính hiệu quả, ngắn gọn của việc sư dụng tích vô hướng để giải một số bài toán thường gặp. Sau đây là một số đề toán để luyện tập :

Bài 5 : Giải phương trình :

$$x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}.$$

Giải : ĐK : $-1 \le x \le 3$. Đặt $\overrightarrow{u} = (x, 1), \overrightarrow{v} = (\sqrt{x+1}, \sqrt{3-x})$.

Khi đó $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$;

$|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^2+1}.\sqrt{(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{3-x})^2} = 2\sqrt{x^2+1}.$

Do đó $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}| \Rightarrow \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ cộng tuyến

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}} (DK : 0 < x \le 3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{x+1}{3-x} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1 + \sqrt{2}$, nghiệm $x_3 = 1 - \sqrt{2} < 0$, bị loại

Bài 6 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3 \end{cases}$$

Giải : Xét hai vectơ $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ và $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$.
Ta có :
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1x^2 + 1y^2 + 1z^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 3$
$|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$
$\Rightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}| = 3$
từ đó suy ra $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ cộng tuyến với nhau. (1)
mà $|\overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{v}| = \sqrt{3}$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$
Vậy nghiệm của hệ phương trình trên có tọa độ là $(1, 1, 1)$

Bài 7 : Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$

Giải :

Chọn $\overrightarrow{u}(x; y; z), \overrightarrow{v}(x^2; y^2; z^2)$ từ đề bài suy ra $|\overrightarrow{u}| = 1$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x^3 + y^3 + z^3 = 1$.
Mặt khác ta lại có $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^4 + y^4 + z^4} = \sqrt{1 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)} \leq 1$. Nên suy ra $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \leq 1$

Như vậy dẫn đến $\begin{cases} |\overrightarrow{v}| = 1 \\ \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ yz = 0 \\ zx = 0 \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 0, z = 0 \\ x = 0, y = 1, z = 0 \\ x = 0, y = 0, z = 1 \end{cases}$

Thử lại ta được nghiệm của hệ là $(x; y; z) = (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)$.

Bài 8 : Giải phương trình :$\sin x + \cos x = 1$.

Giải:

Ta chọn các vectơ $\overrightarrow{u} = (\sin x, \cos x), \overrightarrow{v} = (1, 1)$
Ta có : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \sin x + \cos x = 1$.
Mặt khác $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}.\sqrt{1+1}\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \sqrt{2}\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Vậy $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \sqrt{2}\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 1$.
Do đó $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{4}$

Vì $\overrightarrow{v} = (1, 1)$ nên ta suy ra $x = k2\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ với k là một số tự nhiên.

Ví dụ 9: Giải phương trình :

$$x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}.$$

Giải : ĐK : $-1 \leq x \leq 3$. Đặt $\overrightarrow{a} = (x, 1)$, $\overrightarrow{b} = (\sqrt{x+1}, \sqrt{3-x})$.
Khi đó $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$;
$|\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{x^2+1}.\sqrt{(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{3-x})^2} = 2\sqrt{x^2+1}$.
Do đó $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right| \Rightarrow \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ cộng tuyến
$\Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}}$ (ĐK : $0 < x \leq 3$)
$\Leftrightarrow x^2 = \frac{x+1}{3-x} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$\Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 1 + \sqrt{2}$, nghiệm $x_3 = 1 - \sqrt{2} < 0$, bị loại

Ví dụ 10 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -y(x+z) \\ x^2 + x + y = -2yz \\ 3x^2 + 8y^2 + 8xy + 8yz = 2x + 4z + 2. \end{cases}$$

Giải : Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x(x+y) + y(y+z) = 0 \\ x(x+1) + y(2z+1) = 0 \\ 4(x+y)^2 + 4(y+z)^2 = (x+1)^2 + (2y+1)^2. \end{cases}$$

Xét các vectơ :
$\overrightarrow{a} = (x, y)$, $\overrightarrow{b} = (x+y, y+z)$, $\overrightarrow{c} = (x+1, 2z+1)$
$\Rightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0, \overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} = 0, 4\overrightarrow{b}^2 = \overrightarrow{c}^2$.
* Nếu $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} thx = y = 0, z = \frac{1}{2}$.
Nếu $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ thì $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ cộng tuyến $\Rightarrow \overrightarrow{c} = \pm 2$
Xét hai trường hợp $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c} = -2\overrightarrow{b}$ ta có $x = 0, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$.
Vậy hệ có hai nghiệm (x, y, z) là $\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 11 : Giải phương trình sau :

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}.$$

Giải : Điều kiện $x \geq 0$.
Chọn $\overrightarrow{u}=(2\sqrt{2};\sqrt{x+1})$, $\overrightarrow{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}};\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)$, áp dụng (II') ta suy ra :

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}\leq\sqrt{8+x+1}.\sqrt{\frac{1+x}{x+1}}=\sqrt{x+9}.$$

Như vậy dấu "=" đạt được khi:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x}}{1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{1}{7}$.

Ví dụ 12: Giải phương trình $\sin x+\sqrt{3}.\cos x=1$.
Giải :Đặt $\overrightarrow{u}=(\sqrt{3};1)$, $\overrightarrow{v}=(\cos x;\sin x)$, suy ra :

$$|\overrightarrow{u}|=2,|\overrightarrow{v}|=1,(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{u})=\frac{\pi}{6},(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{v})=x.$$

khi đó phương trình trở thành: $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=1$. Hay:

$$|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=1\Leftrightarrow 2\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=1\Leftrightarrow\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\pm\frac{\pi}{3}$$

Theo hệ thức sac-lơ ta có : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{u})+(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+k2\pi(k\in Z)$

$$\Leftrightarrow(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{v})=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$$

Ví dụ 13 : Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} x^2+yz=1\\ y^2-zx=0\\ z^2+zy=0\end{cases}$

Giải : Chọn ba vectơ: $\overrightarrow{u}(y;z)$, $\overrightarrow{v}(x;z)$, $\overrightarrow{w}(y;-x)$
Từ phương trình thứ ba suy ra : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0$
Từ phương trình hai suy ra : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}=0$
Nếu $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ thì suy ra $\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ cộng tuyến $\Leftrightarrow x^2+yz=0$ trái với phương trình đầu.
Như vậy $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ hay $y=z=o$. Từ phương trình đầu $x^2+yz=0\Rightarrow x=1$.

Kiểm tra lại ta có nghiệm của hệ $(x;y;z)$ là :$(1;0;0)$ và $(-1;0;0)$.

Ví dụ 14 : Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} x(y-1)+yz=0 \\ x(2z-3)+y(x-z)=0 \\ (2z-3)^2+(x-z)^2=(y-1)^2+z^2 \end{cases}$

Giải : Chọn ba vectơ $\overrightarrow{u}(x;y), \overrightarrow{v}(y-1;z), \overrightarrow{w}(2z-3;x-z)$.
Từ phương trình đầu suy ra : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0$ (1)
Từ phương trình hai suy ra : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}=0$ (2)
Từ phương trình ba suy ra : $\overrightarrow{u}^2=\overrightarrow{w}^2$ (3)
Nếu $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow x=y=0$ thay vào hệ suy ra : $z=1$ hoặc $z=2$.
Nếu $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ cộng tuyến.
Mà từ (3) có $\overrightarrow{v}^2=\overrightarrow{w}^2$ nên ta suy ra : $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}$.

Với $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=2z-3 \\ z=x-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2z-2 \\ x=2z \end{cases}$
Thay y, z vào (1) ta được $x=\frac{8}{3}, y=\frac{2}{3}, z=\frac{4}{3}$.

Với $\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{w} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=3-2z \\ z=z-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2z \\ x=0 \end{cases}$
Thay vào (1) ta được $x=0, y=4, z=0$ hoặc $x=0, y=0, z=2$
Kết luận nghiệm của hệ $(x;y;z)$ là $(0;0;1), (0;0;2), (0;4;0$ và $(\frac{8}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3})$.